Λύσεις 2ης Σειράς Ασκήσεων

1. **($13+13=26$ μονάδες)** Θεωρούμε κανονική γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$. Αποδείξτε ότι καθεμιά από τις παρακάτω γλώσσες είναι επίσης κανονική.

   (α) $L_1 = \{0^n \mid$ υπάρχει λέξη $w \in \{0,1\}^*$ τέτοια ώστε $|w| = n$ και $w \in L\}$.

   Θεωρούμε (ντετερμινιστικό) πεπερασμένο αυτόματο (ΝΠΑ) $\mathbf{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ τέτοιο ώστε $L = \mathsf{L}(\mathbf{M})$. Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\Sigma = \{0,1\}$. Κατασκευάζουμε ένα μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $\mathbf{M}' = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$ (για το οποίο θα δείξουμε ότι $\mathsf{L}(\mathbf{M}') = L_1$) ως εξής:

   - $Q' = Q$
   - $\Sigma' = \{0\}$
   - Για κάθε κατάσταση $q \in Q' (= Q)$, $\delta'(q, 0) = \{\delta(q,0), \delta(q,1)\}$.
   - $q_0' = q_0$
   - $F' = F$

   Έχουμε να δείξουμε ότι $\mathsf{L}(\mathbf{M}') = L_1$. Θα δείξουμε πρώτα μια βοηθητική πρόταση:

   Πρόταση 1. *Για κάθε λέξη 0^n με $n \geq 0$,*

$$\widehat{\delta}'(q_0', 0^n) \ = \ \bigcup_{w \in \{0,1\}^* | |w| = n} \widehat{\delta}(q_0, w)\,.$$

   Απόδειξη. Με επαγωγή πάνω στο n.

   <u>*Βάση:*</u> Για $n = 0$, $0^n = \epsilon$. Τότε,

$$\begin{aligned} & \widehat{\delta}'(q_0', \epsilon) \\ = \ & \{q_0'\} \quad (\text{από τη βάση στον ορισμό της } \widehat{\delta}') \\ = \ & \{q_0\} \quad (\text{από την κατασκευή της } q_0')\,, \end{aligned}$$

   και

$$\begin{aligned} & \bigcup_{w \in \{0,1\}^* | |w| = \epsilon} \widehat{\delta}(q_0, \epsilon) \\ = \ & \widehat{\delta}(q_0, \epsilon) \quad (\text{αφού } \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| = 0\} = \{\epsilon\}) \\ = \ & \{q_0\} \quad (\text{από τη βάση στον ορισμό της } \widehat{\delta})\,. \end{aligned}$$

   Έπεται ότι

$$\widehat{\delta}'(q_0', \epsilon) \ = \ \bigcup_{w \in \{0,1\}^* | |w| = \epsilon} \widehat{\delta}(q_0, \epsilon)\,,$$

   <u>*Επαγωγική υπόθεση:*</u> Υποθέτουμε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ με $n \leq \kappa$,

$$\widehat{\delta}'(q_0', 0^n) \ = \ \bigcup_{w \in \{0,1\}^* | |w| = n} \widehat{\delta}(q_0, w)\,.$$

<u>*Επαγωγικό βήμα:*</u> Θεωρούμε τη λέξη $0^{\kappa+1}$. Τότε,

$$
\begin{array}{lcl}
& \widehat{\delta}'(q_0', 0^{\kappa+1}) & \\
= & \bigcup_{q \in \widehat{\delta}'(q_0', 0^\kappa)} \delta'(q, 0) & (\text{από επαγωγικό βήμα στον ορισμό της } \widehat{\delta}') \\
= & \bigcup_{q \in \bigcup_{w \in \{0,1\}^* || w| = \kappa} \widehat{\delta}(q_0, w)} \delta'(q, 0) & (\text{από επαγωγική υπόθεση}) \\
= & \bigcup_{q \in \bigcup_{w \in \{0,1\}^* || w| = \kappa} \widehat{\delta}(q_0, w)} \{\delta(q,0), \delta(q,1)\} & (\text{από κατασκευή της } \delta') \\
= & \bigcup_{w \in \{0,1\}^* || w| = \kappa+1} \widehat{\delta}(q_0, w) &
\end{array}
$$

όπως χρειάζεται. □

Έχουμε ότι

$$
\begin{array}{lcl}
& \mathsf{L}(\mathbf{M}') & \\
= & \{0^n \mid \widehat{\delta}'(q_0', 0^n) \cap F' \neq \emptyset\} & \\
= & \{0^n \mid \left(\bigcup_{w \in \{0,1\}^* || w| = n} \widehat{\delta}(q_0, w)\right) \cap F' \neq \emptyset\} & (\text{από Πρόταση 1}) \\
= & \{0^n \mid \left(\bigcup_{w \in \{0,1\}^* || w| = n} \widehat{\delta}(q_0, w)\right) \cap F \neq \emptyset\} & (\text{από κατασκευή του } F') \\
= & \{0^n \mid \bigvee_{w \in \{0,1\}^* || w| = n} \left(\widehat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\right)\} & \\
= & L_1\,, &
\end{array}
$$

όπως χρειάζεται.

(β) $L_2 = \{0^n \mid$ υπάρχει λέξη $w \in \{0,1\}^*$ τέτοια ώστε $|w| = n$ και $0^n w \in L\}$.

Θεωρούμε ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (ΝΠΑ) $\mathbf{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ τέτοιο ώστε $L = \mathsf{L}(\mathbf{M})$. Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\Sigma = \{0,1\}$. Κατασκευάζουμε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $\mathbf{M}' = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$ (για το οποίο θα δείξουμε ότι $\mathsf{L}(\mathbf{M}') = L_2$) ως εξής:

- $Q' = Q \times 2^Q$
- $\Sigma' = \{0\}$
- Για κάθε κατάσταση $(q, P) \in Q' (= Q \times 2^Q)$,

$$\delta'((q,P),0) \;\; = \;\; (\delta(q,0), \{p \in Q \mid \delta(p,\sigma) \in P \text{ για κάποιο σύμβολο } \sigma \in \Sigma\})\,.$$

- $q_0' = (q_0, F)$
- $F' = \{(q,P) \in Q \times 2^Q \mid q \in P\}$

Έχουμε να δείξουμε ότι $\mathsf{L}(\mathbf{M}') = L_2$. Ορίζουμε πρώτα μια βοηθητική ποσότητα, η οποία θα διευκολύνει την διατύπωση των περεταίρω συλλογισμών μας. Για αυθαίρετο σύνολο καταστάσεων $P \subseteq Q$, και γι αυθαίρετο ακέραιο $n \geq 0$, ορίζουμε το σύνολο

$$P^{(n)} \;\; = \;\; \{p \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p, w) \in P\}\,.$$

Διαισθητικά, το σύνολο $P^{(n)}$ είναι το σύνολο των καταστάσεων που προκύπτουν αν ξεκινήσουμε από μια κατάσταση του P και "οπισθοχωρήσουμε" κατά n βήματα. Δηλαδή, το σύνολο $P^{(n)}$ είναι το σύνολο των καταστάσεων από τις οποίες είναι προσιτή μια κατάσταση από το σύνολο P σε n βήματα. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
P^{(0)} &= \left\{p \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = 0 \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p,w) \in P\right\} \\
&= \{p \in Q \mid \widehat{\delta}(p,\epsilon) \in P\} \\
&= \{p \in Q \mid p \in P\} \\
&= P\,,
\end{aligned}$$

και για κάθε ακέραιο $m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& (P^{(n)})^{(m)} \\
= \; & \{p \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = m \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p,w) \in P^{(n)} \ \} \\
= \; & \left\{ p \in Q \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = m \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p,w) \in \\ \{q \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } u \in \Sigma^* \text{ με } |u| = n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(q,u) \in P \ \} \end{array} \right\} \\
= \; & \left\{ p \in Q \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = m \text{ τέτοια ώστε υπάρχει λέξη } u \in \Sigma^* \\ \text{με } |u| = n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(p,w),u) \in P \end{array} \right\} \\
= \; & \left\{ p \in Q \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχουν λέξεις } w, u \in \Sigma^* \text{ με } |w| = m \text{ και } |u| = n \text{ τέτοιες ώστε} \\ \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(p,w),u) \in P \end{array} \right\} \\
= \; & \left\{ p \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } v \in \Sigma^* \text{ με } |v| = m+n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(p,w),u) \in P \ \right\} \\
= \; & P^{(m+n)}\,.
\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δείξουμε μια βοηθητική πρόταση.

Πρόταση 1. *Για κάθε λέξη 0^n με $n \geq 0$, και για κάθε κατάσταση $p \in Q$ και σύνολο καταστάσεων $P \subseteq Q$,*

$$\widehat{\delta}'((p,P),0^n) \;\; = \;\; (\widehat{\delta}(p,0^n), P^{(n)})\,.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή πάνω στο n.

Βάση: Για $n = 0$, $0^n = \epsilon$. Τότε,

$$\begin{aligned}
& \widehat{\delta}'((p,P),\epsilon) \\
= \; & (p,P) && \text{(από την βάση στον επαγωγικό ορισμό της } \widehat{\delta}'\text{)} \\
= \; & (\widehat{\delta}(p,\epsilon),P) && \text{(από την βάση στον επαγωγικό ορισμό της } \widehat{\delta}\text{)} \\
= \; & (\widehat{\delta}(p,\epsilon),P^{(0)})\,.
\end{aligned}$$

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ με $n \leq \kappa$,

$$\widehat{\delta}'((p,P),0^n) \;\; = \;\; (\widehat{\delta}(p,0^n), P^{(n)})\,.$$

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε τη λέξη $0^{\kappa+1}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
& \widehat{\delta}'((p,P),0^{\kappa+1}) \\
= \; & \delta'(\widehat{\delta}'((p,P),0^\kappa),0) && \text{(από επαγωγικό βήμα στον ορισμό της } \widehat{\delta}'\text{)} \\
= \; & \delta'((\widehat{\delta}(p,0^\kappa),P^{(\kappa)}),0) && \text{(από επαγωγική υπόθεση)} \\
= \; & (\delta(\widehat{\delta}(p,0^\kappa),0),(P^{(\kappa)})^{(1)}) && \text{(από τον ορισμό της } \delta'\text{)} \\
= \; & (\widehat{\delta}(p,0^{\kappa+1}),(P^{(\kappa)})^{(1)}) && \text{(από επαγωγικό βήμα στον ορισμό της } \widehat{\delta}\text{)} \\
= \; & (\widehat{\delta}(p,0^{\kappa+1}),P^{(\kappa+1)})\,,
\end{aligned}$$

όπως χρειάζεται. $\square$

Χρησιμοποιώντας την κατασκευή των F' και q_0', την Πρόταση 1 και τον ορισμό του συνόλου $F^{(n)}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}(\mathbf{M}') &= \left\{0^n \mid \widehat{\delta}'(q_0', 0^n) \in F'\right\} \\
&= \left\{0^n \mid \widehat{\delta}'(q_0', 0^n) \in \left\{(q, P) \in Q \times 2^Q \mid q \in P\right\}\right\} \\
&= \left\{0^n \mid \widehat{\delta}'((q_0, F), 0^n) \in \left\{(q, P) \in Q \times 2^Q \mid q \in P\right\}\right\} \\
&= \left\{0^n \mid (\widehat{\delta}(q_0, 0^n), F^{(n)}) \in \left\{(q, P) \in Q \times 2^Q \mid q \in P\right\}\right\} \\
&= \left\{0^n \mid \widehat{\delta}(q_0, 0^n) \in F^{(n)}\right\} \\
&= \left\{0^n \mid \widehat{\delta}(q_0, 0^n) \in \left\{p \in Q \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = n \\ \text{τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p, w) \in F \end{array}\right\}\right\} \\
&= \left\{0^n \mid \text{ υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(q_0, 0^n w) \in F \right\} \\
&= \{0^n \mid \text{ υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = n \text{ τέτοια ώστε } 0^n w \in L \} \\
&= L_2\,,
\end{aligned}$$

όπως χρειάζεται.

2. **$(3 + 9 + 15 + 8 + 15 = 50$ μονάδες)** Έστω αυθαίρετο αλφάβητο Σ. Θεωρούμε τη γλώσσα

$$L \;=\; \{w1\sigma_1\sigma_2 \mid \; w \in \Sigma^* \text{ και } \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma\}\,.$$

Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\Sigma = \{0, 1\}$.

(α) Περιγράψτε με απλά λόγια τη γλώσσα L.

Η γλώσσα L είναι το σύνολο όλων των λέξεων πάνω στο αλφάβητο Σ στις οποίες το τρίτο σύμβολο από το τέλος είναι 1.

(β) Παρουσιάστε ένα μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (ΜΝΠΑ) το οποίο να δέχεται τη γλώσσα L.

Θεωρούμε το ΜΝΠΑ $\mathbf{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ όπου:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- Η συνάρτηση μετάβασης δ ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα:

$q \in Q$	$\sigma \in \Sigma$	$\delta(q, \sigma)$
q_1	0	$\{q_1\}$
q_1	1	$\{q_1, q_2\}$
q_2	0	$\{q_3\}$
q_2	1	$\{q_3\}$
q_3	0	$\{q_4\}$
q_3	1	$\{q_4\}$
q_4	0	$\emptyset$
q_4	1	$\emptyset$

- $q_0 = q_1$
- $F = \{q_4\}$

(γ) Αποδείξτε τυπικά ότι το ΜΝΠΑ που έχετε παρουσιάσει δέχεται την L.

Θα αποδείξουμε ότι $L = \mathsf{L}(\mathbf{M})$. Θα δείξουμε δύο εγκλεισμούς:

- $L \subseteq \mathsf{L}(\mathbf{M})$: Έστω αυθαίρετη λέξη $u \in L$. Θα δείξουμε ότι $u \in \mathsf{L}(\mathbf{M})$. Αφού $u \in L$, $u = w1\sigma_1\sigma_2$, όπου $w \in \Sigma^*$ και $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. Από την κατασκευή της συνάρτησης μετάβασης δ και τον επαγωγικό ορισμό της επεκτεταμένης συνάρτησης μετάβασης, παρατηρούμε ότι $q_4 \in \widehat{\delta}(q_1, 1\sigma_1\sigma_2)$. Έχουμε να δείξουμε πρώτα μια βοηθητική πρόταση:

  Πρόταση 1. *Για κάθε λέξη* $w \in \Sigma^*$, $q_1 \in \widehat{\delta}(q_1, w)$.

  Απόδειξη. Με επαγωγή πάνω στο μήκος $|w|$.

  Βάση: Έστω $|w| = 0$. Τότε, $w = \epsilon$. Από την βάση στον (επαγωγικό) ορισμό της επεκτεταμένης συνάρτησης μετάβασης $\widehat{\delta}$, $\widehat{\delta}(q_1, \epsilon) = \{q_1\}$. Ο ισχυρισμός έπεται.

  Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάθε λέξη $w \in \Sigma^*$ με μήκος $|w| \leq \kappa$, $q_1 \in \widehat{\delta}(q_1, w)$.

  Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε αυθαίρετη λέξη $w \in \Sigma^*$ με μήκος $|w| = \kappa + 1$. Τότε, $w = v\sigma$ όπου $v \in \Sigma^*$ με $|v| = \kappa$ και $v \in \Sigma$. Έχουμε ότι

  $$\begin{array}{lll} & \widehat{\delta}(q_1, w) & \\ = & \widehat{\delta}(q_1, v\sigma) & \\ = & \bigcup_{q \in \widehat{\delta}(q_1, v)} \delta(q, \sigma) & (\text{από επαγωγικό βήμα στον ορισμό της } \widehat{\delta}) \\ \supseteq & \delta(q_1, \sigma) & (\text{από επαγωγική υπόθεση}) \\ = & \{q_1, q_2\} & (\text{από κατασκευή της } \delta)\,, \end{array}$$

  και ο ισχυρισμός έπεται. □

  Έχουμε ότι

  $$\begin{array}{lll} & \widehat{\delta}(q_1, w1\sigma_1\sigma_2) & \\ = & \bigcup_{q \in \widehat{\delta}(q_1, w)} \widehat{\delta}(q, 1\sigma_1\sigma_2) & (\text{από επαγωγικό βήμα στον ορισμό της } \widehat{\delta}) \\ \supseteq & \bigcup_{q \in \widehat{\delta}(q_1, w)} \{q_4\} & (\text{από Πρόταση 1}) \\ = & \{q_4\} & \\ = & F\,. & \end{array}$$

  Έπεται ότι $u \in \mathsf{L}(\mathbf{M})$, όπως χρειάζεται.

- $\mathsf{L}(\mathbf{M}) \subseteq L$: Έστω αυθαίρετη λέξη $u \in \mathsf{L}(\mathbf{M})$. Θα δείξουμε ότι $u \in L$. Αφού $u \in \mathsf{L}(\mathbf{M})$, έπεται ότι $\widehat{\delta}(q_1, u) \cap F \neq \emptyset$. Αφού $F = \{q_4\}$, έπεται ότι $q_4 \in \widehat{\delta}(q_1, u)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε λέξη $w \in \{0, 1\}^*$ με $|w| \leq 2$, $q_4 \notin \widehat{\delta}(q_1, u)$. Έπεται ότι $|u| \geq 3$. Επομένως, $u = w\sigma\sigma_1\sigma_2$ όπου $w \in \Sigma^*$ και $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. Αφού $q_4 \in \widehat{\delta}(q_1, u)$, η κατασκευή του $\mathbf{M}$ συνεπάγεται ότι $\sigma = 1$. Συνολικά, λοιπόν, $u = w1\sigma_1\sigma_2$, όπου $w \in \Sigma^*$ και $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. Έτσι, $u \in L$, όπως χρειάζεται.

Έπεται ότι $L = \mathsf{L}(\mathbf{M})$.

(δ) Χρησιμοποιείστε την Κατασκευή Υποσυνόλων για να μετατρέψετε το ΜΝΠΑ σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (ΝΠΑ).

Το ισοδύναμο ΝΠΑ $\mathbf{M}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ που προκύπτει έχει ως εξής:

- $Q' = 2^Q$
- Η συνάρτηση μετάβασης $\delta' : Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$ ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα:

$q \in Q'$	$\sigma \in \Sigma$	$\delta'(q, \sigma)$
$\{q_1\}$	0	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	1	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	0	$\{q_1, q_3\}$
$\{q_1, q_2\}$	1	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3\}$	0	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1, q_3\}$	1	$\{q_1, q_2, q_4\}$
$\{q_1, q_4\}$	0	$\{q_1\}$
$\{q_1, q_4\}$	1	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	0	$\{q_1, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	1	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_4\}$	0	$\{q_1, q_3\}$
$\{q_1, q_2, q_4\}$	1	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3, q_4\}$	0	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1, q_3, q_4\}$	1	$\{q_1, q_2, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	0	$\{q_1, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	1	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

- $q'_0 = \{q_1\}$
- $F' = \{\{q_1, q_2, q_4\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}\}$

(ε) Χρησιμοποιείστε την κατασκευή στην απόδειξη του Θεωρήματος Kleene για να μετατρέψετε το ΝΠΑ που έχετε κατασκευάσει σε μία ισοδύναμη κανονική έκφραση. Δείξτε όλα τα στάδια της κατασκευής σας.

Αντί για το ΝΡΑ που έχουμε κατασκευάσει, θα χρησιμοποιήσουμε το ΜΝΠΑ από το ερώτημα (α). Αφού η κατάσταση q_1 είναι η αρχική κατάσταση και η κατάσταση q_4 είναι η μοναδική τελική κατάσταση, θα προσδιορίσουμε την κανονική έκφραση $\alpha_{q_1 q_4}^{\{q_1,q_2,q_3,q_4\}}$. Από τον αναδρομικό τύπο,

$$\alpha_{q_1 q_4}^{\{q_1,q_2,q_3,q_4\}} = \alpha_{q_1 q_4}^{\{q_2,q_3,q_4\}} \cup \alpha_{q_1 q_1}^{\{q_2,q_3,q_4\}} \left(\alpha_{q_1 q_1}^{\{q_2,q_3,q_4\}}\right)^* \alpha_{q_1 q_4}^{\{q_2,q_3,q_4\}} .$$

Παρατηρούμε ότι

$$\alpha_{q_1 q_4}^{\{q_2,q_3,q_4\}} = 1(0 \cup 1)(0 \cup 1)$$

και

$$\alpha_{q_1 q_1}^{\{q_2,q_3,q_4\}} = (0 \cup 1)^* .$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
\alpha_{q_1 q_4}^{\{q_1,q_2,q_3,q_4\}} &= (1(0 \cup 1)(0 \cup 1)) \cup (0 \cup 1)^*((0 \cup 1)^*)^*(1(0 \cup 1)(0 \cup 1)) \\
&= (1(0 \cup 1)(0 \cup 1)) \cup (0 \cup 1)^*(0 \cup 1)^*(1(0 \cup 1)(0 \cup 1)) \\
&= (1(0 \cup 1)(0 \cup 1)) \cup (0 \cup 1)^*(1(0 \cup 1)(0 \cup 1)) \\
&= (0 \cup 1)^*(1(0 \cup 1)(0 \cup 1)) ,
\end{aligned}$$

όπου έχουμε εφαρμόσει διαδοχικές απλοποιήσεις.

3. **(15 + 9 = 24 μονάδες)** Θεωρούμε την κανονική έκφραση $(01 \cup 011 \cup 0111)^*$.

(α) Χρησιμοποιείστε την κατασκευή στην απόδειξη του Θεωρήματος Kleene για να μετατρέψετε την κανονική έκφραση σε ένα ισοδύναμο ΜΝΠΑ. Δείξτε όλα τα στάδια της κατασκευής σας.

(β) Παρουσιάστε το απλούστερο δυνατο (ισοδύναμο) ΜΝΠΑ που μπορείτε.