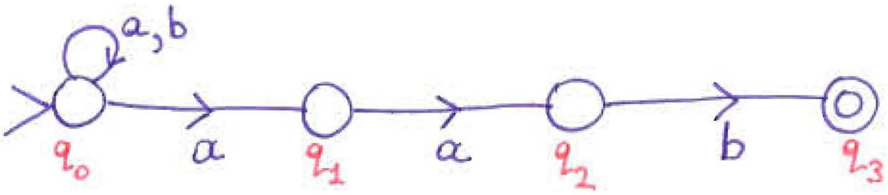
Ενδιάμεση Εξέταση

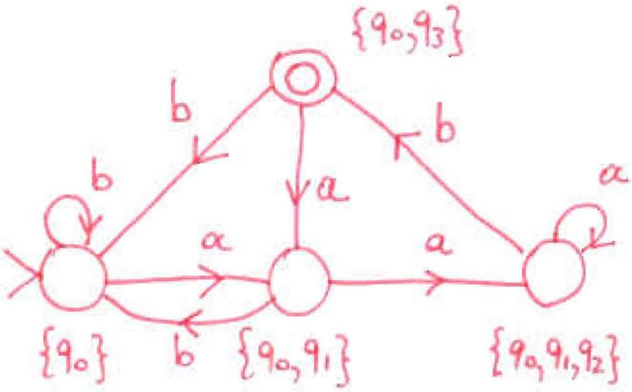
- Απαντείστε όλα τα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: Μία ώρα και δεκαπέντε λεπτά.

1. **(8 + 8 = 16 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά την ισοδυναμία μη ντετερμινιστικών και ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων. Η Κατασκευή Υποσυνόλων παρέχει κατασκευαστική απόδειξη της ισοδυναμίας. Χρησιμοποιείστε την Κατασκευή Υποσυνόλων για να μετατρέψετε καθένα από τα μη ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα M_1 και M_2 του σχήματος σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.

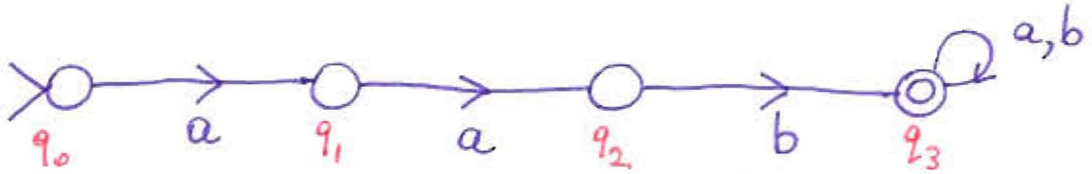
   (α) Το αυτόματο M_1:



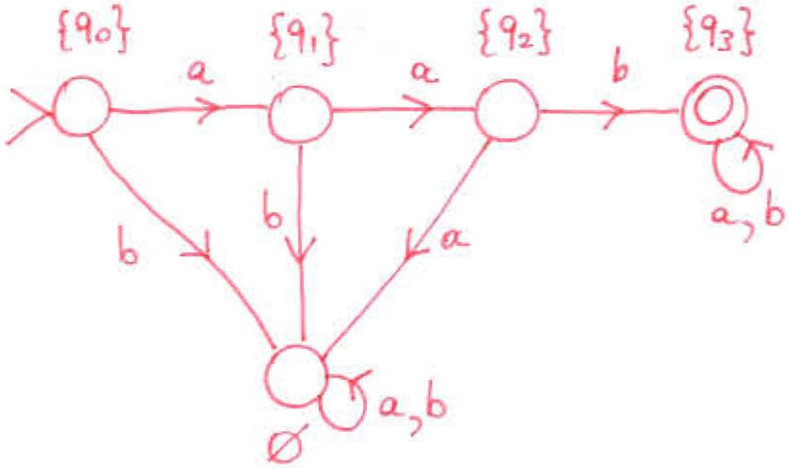
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
$\{q_0\}$	a	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0\}$	b	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	a	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1\}$	b	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	a	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	b	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	a	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_3\}$	b	$\{q_0\}$



(β) Το αυτόματο M_2:



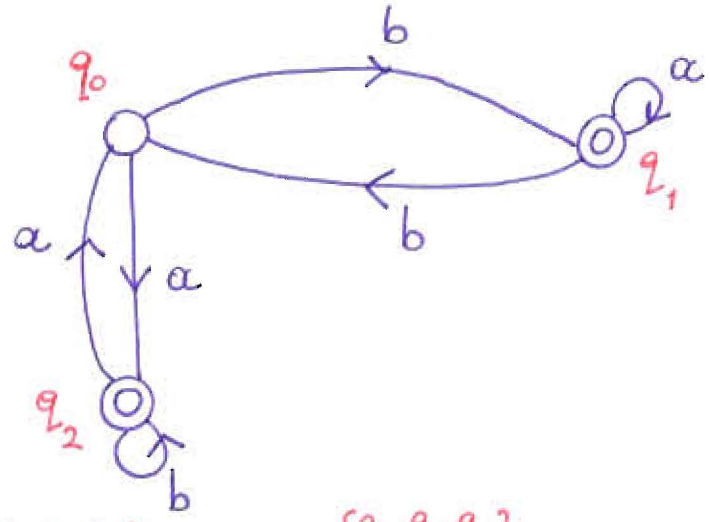
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
$\{q_0\}$	a	$\{q_1\}$
$\{q_0\}$	b	$\emptyset$
$\{q_1\}$	a	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$	b	$\emptyset$
$\{q_2\}$	a	$\emptyset$
$\{q_2\}$	b	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	a	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	b	$\{q_3\}$
$\emptyset$	a	$\emptyset$
$\emptyset$	b	$\emptyset$



2. **(10 + 10 = 20 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά την ισοδυναμία κανονικών εκφράσεων και πεπερασμένων αυτομάτων. Το Θεώρημα Kleene παρέχει κατασκευαστική απόδειξη της ισοδυναμίας. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο να βασίσετε τις κατασκευές που θα σας ζητηθούν στην κατασκευαστική εκείνη απόδειξη.

   (α) Κατασκευάστε μία κανονική έκφραση <u>ισοδύναμη</u> προς το πεπερασμένο αυτόματο M_3 του σχήματος.

M_3



$$\alpha = \alpha_{q_0 q_1}^{\{q_0,q_1,q_2\}} \cup \alpha_{q_0 q_2}^{\{q_0,q_1,q_2\}}$$

- $$\alpha_{q_0 q_1}^{\{q_0,q_1,q_2\}} = \alpha_{q_0 q_1}^{\{q_1,q_2\}} \cup \alpha_{q_0 q_0}^{\{q_1,q_2\}} \left(\alpha_{q_0 q_0}^{\{q_1,q_2\}}\right)^* \alpha_{q_0 q_1}^{\{q_1,q_2\}}$$

όπου:

$$\alpha_{q_0 q_1}^{\{q_1,q_2\}} = ba^*$$

$$\alpha_{q_0 q_0}^{\{q_1,q_2\}} = ba^*b \cup ab^*a$$

- $$\alpha_{q_0 q_2}^{\{q_0,q_1,q_2\}} = \alpha_{q_0 q_2}^{\{q_1,q_2\}} \cup \alpha_{q_0 q_0}^{\{q_1,q_2\}} \left(\alpha_{q_0 q_0}^{\{q_1,q_2\}}\right)^* \alpha_{q_0 q_2}^{\{q_1,q_2\}}$$

όπου:

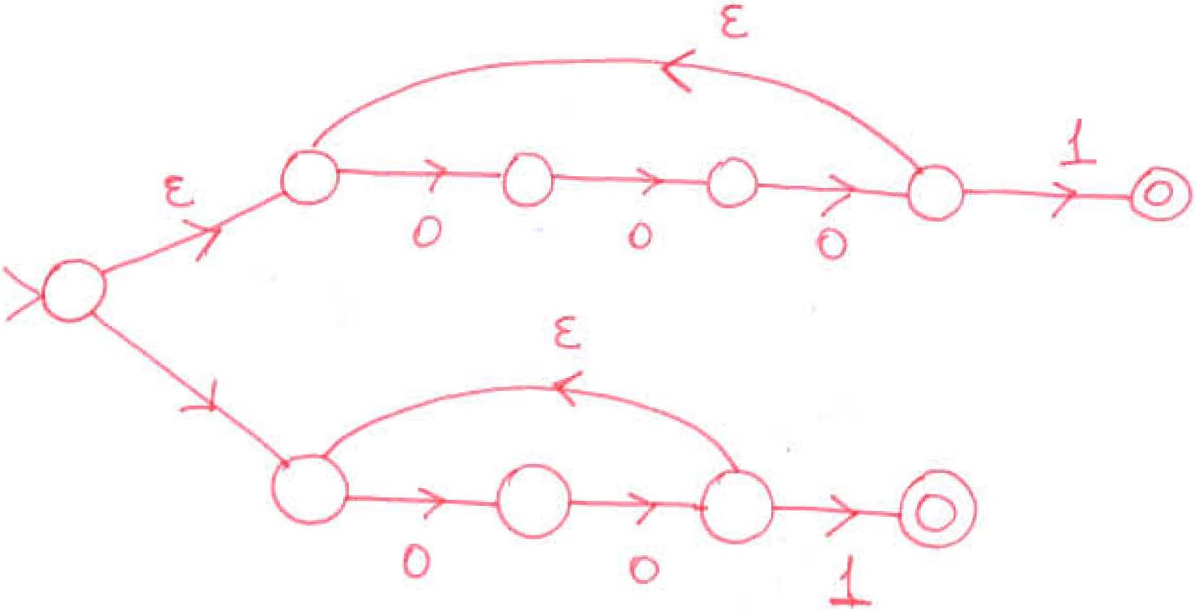
$$\alpha_{q_0 q_2}^{\{q_1,q_2\}} = ab^*$$

$$\alpha_{q_0 q_0}^{\{q_1,q_2\}} = ba^*b \cup ab^*a$$

Αποτέλεσμα:

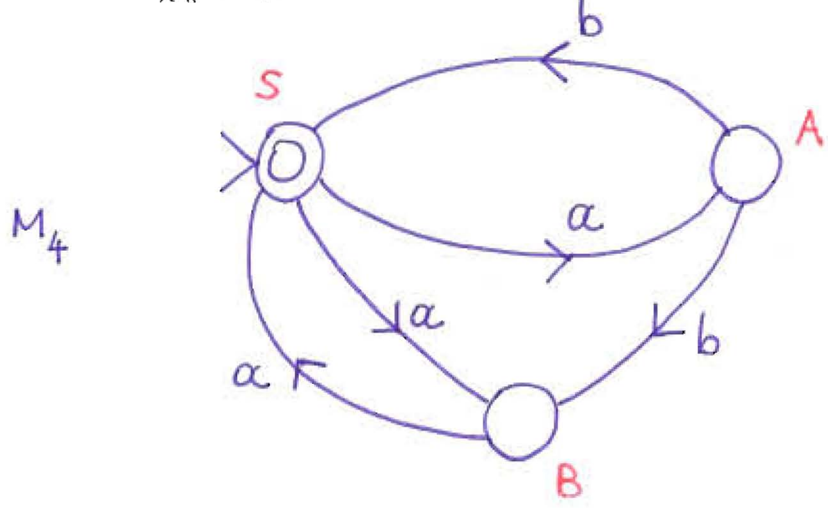
$$\alpha = (ba^* \cup (ba^*b \cup ab^*a)(ba^*b \cup ab^*a)^* ba^*) \cup (ab^* \cup (ba^*b \cup ab^*a)(ba^*b \cup ab^*a)^* ab^*)$$

(β) Κατασκευάστε ένα πεπερασμένο αυτόματο ισοδύναμο προς την κανονική έκφραση $(000)^*1 \cup (00)^*1$.



3. **(10 + 10 = 20 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά την ισοδυναμία κανονικών γραμματικών και πεπερασμένων αυτομάτων.

(α) Κατασκευάστε κανονική γραμματική <u>ισοδύναμη</u> προς το πεπερασμένο αυτόματο M_4 του σχήματος.



$\Sigma = \{a, b\}$

$V = \{S, A, B\}$

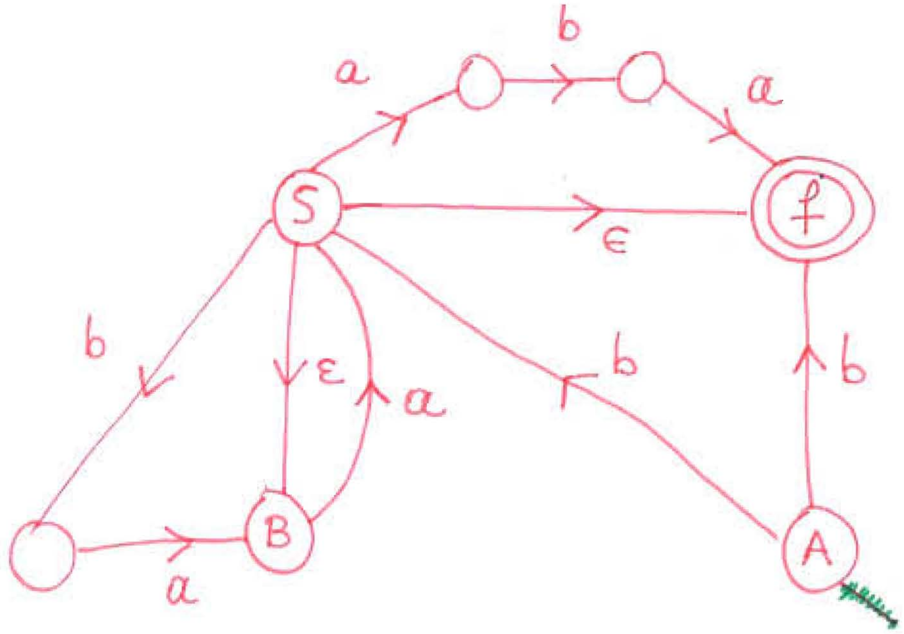
S

$$R = \{ S \rightarrow aA \mid aB \mid e,\quad A \rightarrow bS \mid bB,\quad B \rightarrow aS \}$$

(β) Κατασκευάστε πεπερασμένο αυτόματο <u>ισοδύναμο</u> προς την κανονική γραμματική με κανόνες

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aba \mid B \mid baB \mid \epsilon \\ A & \to & bS \\ B & \to & aS \\ A & \to & b \end{array}$$

(Νοείται ότι S είναι το αρχικό σύμβολο και S, A, B είναι οι μεταβλητές της γραμματικής.)



4. **(3 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 + 8 = 25 μονάδες)** Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L = \{u\$x\$y \mid u, x, y \in \{a,b\}^* \text{ και } \#_a(y) = \#_a(u) + \#_a(x)\}$$

δεν είναι κανονική.

Σημειώστε ότι τα σύμβολα $\#_a(y)$, $\#_a(u)$ και $\#_a(x)$, συμβολίζουν τον αριθμό των εμφανίσεων του συμβόλου a στις λέξεις y, u και x, αντίστοιχα.

Η απόδειξή σας πρέπει να συμπληρώσει κατάλληλα τα (εννέα) κενα στην παρακάτω (ελλιπή) απόδειξη:

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η L είναι κανονική. Αφού η L είναι άπειρη, το Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά $M_L > 0$ τέτοια ώστε κάθε λέξη $w \in L$ με μήκος $|w| \geq M_L$ μπορεί να γραφεί ως $w = xyz$ έτσι ώστε *(i)* $y \neq \epsilon$, *(ii)* $|xy| \neq M_L$, και *(iii)* για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, $xy^n z \in L$.

Επιλέγουμε τη λέξη $w =$ $a^{M_L}\$a\$a^{M_L+1}$ από τη γλώσσα L.

Προφανώς, $|w| =$ $2M_L+4$ $\geq M_L$.

Από τις συνθήκες *(i)* και *(ii)*, έπεται ότι $x =$ a^i ,

$y =$ a^j και

$z =$ $a^{M_L-i-j}\$a\$a^{M_L+1}$,

όπου $0 \leq i < M_L$ και $0 < j \leq M_L$.

Επιλέγουμε $n =$ 0 .

Τότε, $xy^n z =$ $a^{M_L-j}\$a\$a^{M_L+1}$.

Παρατηρούμε ότι $(M_L-j)+(1) < M_L+1$ (αφού $j>0$). -

- Έτσι, $xy^0z \notin L$. -

- ___ -

- ___ -

- ___ Αντίφαση.

5. **(19 μονάδες)** Κατασκευάστε κατηγορηματική γραμματική η οποία παράγει τη γλώσσα

$$L_2 \;=\; \{x\$y \mid \; x, y \in \{a, b\}^* \text{ και } |x| > |y| \;\} \;.$$

Η γραμματική σας οφείλει να είναι ορθή. Ωστόσο, δεν σας ζητείται να αποδείξετε την ορθότητά της.

$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid aSa \mid bSb$

$S \rightarrow aS \mid bS$

$S \rightarrow a\$ \mid b\$$