Τελική Εξέταση

- Απαντείστε όλα τα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: Δύο ώρες.

1. **(9 + 12 = 21 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά την κατασκευή ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων και την Κατασκευή Γινομένου. Υπενθυμίζουμε ότι η Κατασκευή Γινομένου παρέχει κατασκευαστική απόδειξη ότι η τομή των γλωσσών δύο ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων είναι γλώσσα ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτομάτου. Με στοιχειώδη τροποποίησή της, η Κατασκευή Γινομένου παρέχει αντίστοιχη κατασκευαστική απόδειξη ότι και η ένωση των γλωσσών δύο ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων είναι γλώσσα ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτομάτου. (Η Κατασκευή Γινομένου παρουσιάζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.16 του προσχεδίου βιβλίου υπό του διδάσκοντος.) Θεωρούμε τις γλώσσες

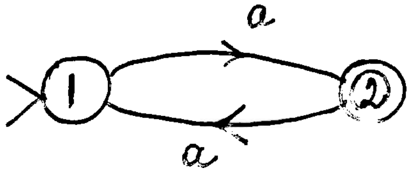
$$L_1 = \{a^n \mid \text{ο } n \text{ είναι περιττός}\},$$

$$L_2 = \{a^n \mid \text{ο } n \text{ είναι άρτιος}\},$$

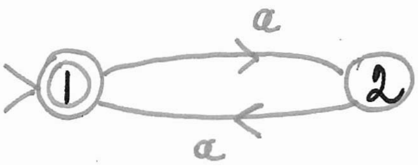
και

$$L_3 = \{a^n \mid \text{ο } n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3\}.$$

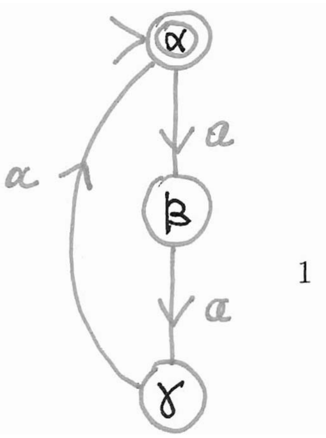
(α) Κατασκευάστε τρία απλά **ντετερμινιστικά** πεπερασμένα αυτόματα για τις γλώσσες L_1, L_2 και L_3, αντίστοιχα.



L_1

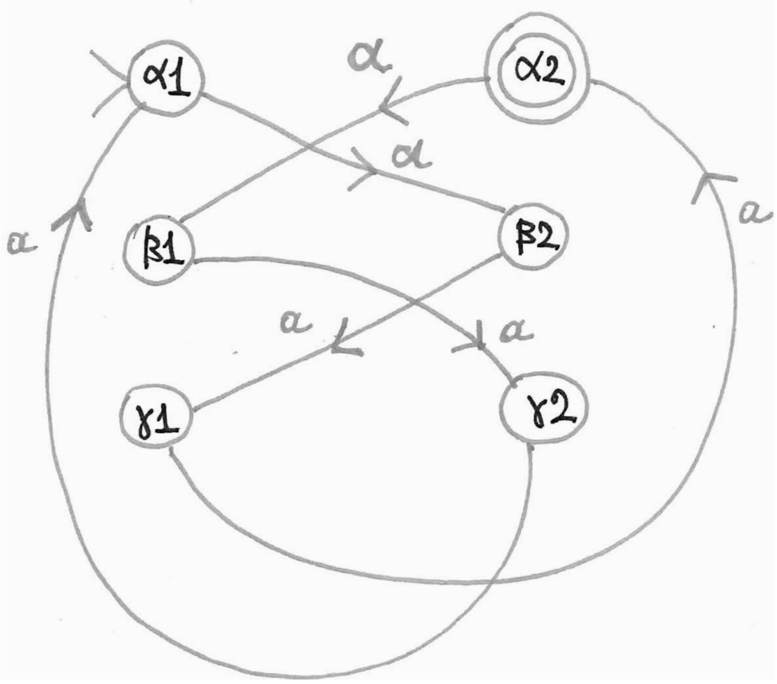


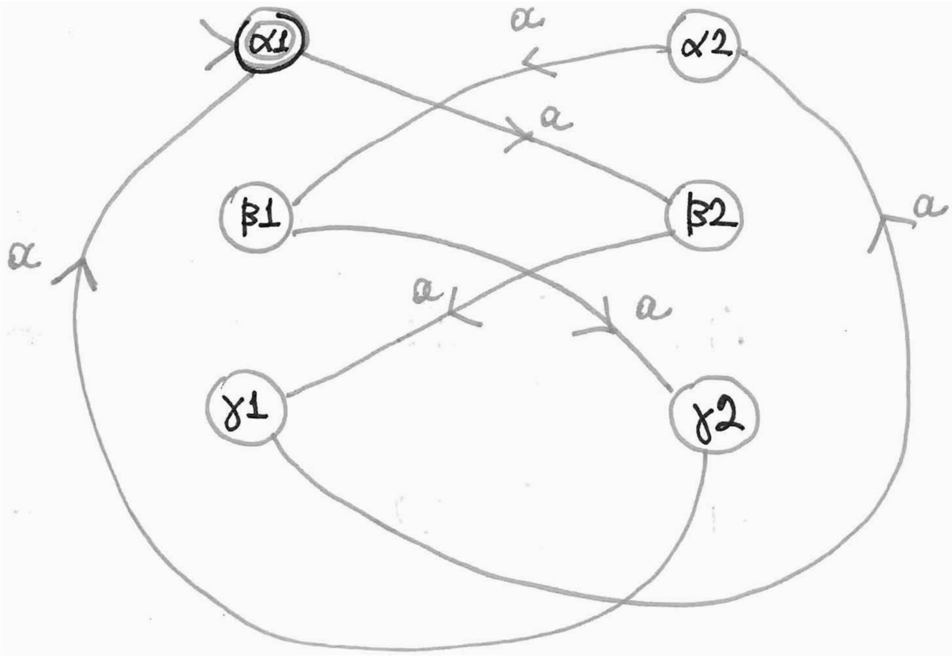
L_2

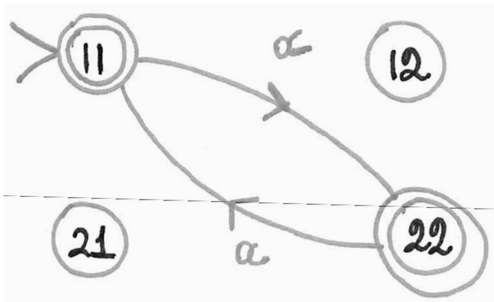


L_3

(β) Χρησιμοποιείστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) και την Κατασκευή Γινομένου για να κατασκευάσετε τρία (απλά) **ντετερμινιστικά** πεπερασμένα αυτόματα για τις γλώσσες $L_4 = L_1 \cap L_3$, $L_5 = L_2 \cap L_3$ και $L_6 = L_1 \cup L_2$, αντίστοιχα.







2. **$(2+2+1+2+2+6+2+2+6 = 25$ μονάδες$)$ Το θέμα αυτό αφορά το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή).** Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) για να δείξετε ότι η γλώσσα

και $p \geq 3$

$$L_7 = \{a^{pq} \mid \text{ο } p \text{ είναι πρώτος αριθμός και ο } q \text{ είναι δύναμη του 2 } \}$$

και $q \geq 2$

δεν είναι κατηγορηματική.

Η απόδειξή σας **πρέπει** να συμπληρώσει κατάλληλα τα (εννέα) κενα στην παρακάτω (ελλιπή) απόδειξη:

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η L_7 είναι κατηγορηματική. Αφού η L_7 είναι άπειρη, το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε κάθε λέξη $w \in L_7$ με μήκος $|w| \geq M$ μπορεί να γραφεί ως $w = uvxyz$ έτσι ώστε *(i)* $vy \neq \epsilon$, *(ii)* $|vxy| \leq M$, και *(iii)* για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, $uv^n xy^n z \in L_7$.

Επιλέγουμε τη λέξη $w = a^{pq}$, όπου ο p είναι πρώτος αριθμός με $p > M$

και ο q είναι δύναμη του 2 με $q > M$;

Προφανώς, $w \in L_7$. Παρατηρούμε ότι $|w| =$ pq $\geq M$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Ο ακέραιος $|vy|$ είναι άρτιος. Τότε, επιλέγουμε $n =$ $pq+1$
  Τότε, $uv^n xy^n z =$ $uv^{pq+1}xy^{pq+1}z = a^{pq+pq|vy|} = a^{pq(1+|vy|)}$.
  Παρατηρούμε ότι ο $1+|vy|$ είναι περιττός. Έτσι, ούτε ο
  - $p(1+|vy|)$ είναι πρώτος (αφου ο p είναι πρώτος και $|vy|>0$),
  - ούτε ο $q(1+|vy|)$ είναι δύναμη του 2. (αφού ο
  - $(1+|vy|)$ είναι περιττός). Αντίφαση.
  - Αντίφαση.
- Ο ακέραιος $|vy|$ είναι περιττός. Τότε, επιλέγουμε $n =$ $pq+2$.
  Τότε, $uv^n xy^n z =$ $uv^{pq+2}xy^{pq+2}z = a^{pq+(pq+1)|vy|} = a^{pq(1+|vy|)+|vy|}$.
  Παρατηρούμε ότι ο $1+|vy|$ είναι άρτιος. Άρα ο
  - $pq(1+|vy|)$ είναι άρτιος. Άρα ο $pq(1+|vy|)+|vy|$
  - είναι περιττός. Άρα, δεν είναι το γινόμενο πρώτου
  - αριθμού και δύναμης του 2, το οποίο είναι άρτιος
  - (αφού $q \geq 2$). Αντίφαση.

3. **(20 + 15 = 35 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά γενικές γραμματικές και αυτόματα με δύο στοίβες. Θεωρούμε τη γλώσσα

$$L_8 \;=\; \{a^i b^i c^i b^i c^i a^i \mid i \geq 0\}\,.$$

(α) Κατασκευάστε μία γενική γραμματική η οποία παράγει τη γλώσσα L_8. Εξηγείστε συνοπτικά τη λειτουργία της γραμματικής σας.

Η γενική γραμματική σας οφείλει να είναι ορθή. Ωστόσο, δεν σας ζητείται να αποδείξετε την ορθότητά της.

Πρώτη ομάδα κανόνων: $S \to aBCSb\hat{C}\hat{A} \mid \epsilon$

(Οι κανόνες αυτοί οδηγούν σε λέξεις της μορφής $(aBC)^n(b\hat{C}\hat{A})^n$ όπου $n \geq 0$.)

Πρώτη και μισή ομάδα κανόνων:
$BCa \to aBC$
$\hat{C}\hat{A}b \to b\hat{C}\hat{A}$

(Οι κανόνες αυτοί μετασχηματίζουν κάθε λέξη της μορφής $(aBC)^n(b\hat{C}\hat{A})^n$ όπου $n \geq 0$ στη λέξη $a^n(BC)^n b^n(\hat{C}\hat{A})^n$.)

Δεύτερη ομάδα κανόνων:
$CB \to BC$
$\hat{A}\hat{C} \to \hat{C}\hat{A}$

(Οι κανόνες αυτοί μετασχηματίζουν κάθε λέξη της μορφής $a^n(BC)^n b^n(\hat{C}\hat{A})^n$ όπου $n \geq 0$ στη λέξη $a^n B^n C^n b^n \hat{C}^n \hat{A}^n$.)

Τρίτη ομάδα κανόνων:

$aB \to ab$	$b\hat{C} \to bc$
$bB \to bb$	$c\hat{C} \to cc$
$bC \to bc$	$c\hat{A} \to ca$
$cC \to cc$	$a\hat{A} \to aa$

(Οι κανόνες αυτοί μετατρέπουν όλα τα B σε b, τα C και $\hat{C}$ σε c, και όλα τα $\hat{A}$ σε a.)

4. **(20 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά την έννοια της πολλά-προς-ένα αναγωγής ($\leq_m$). Θεωρούμε τις γλώσσες

$$L_9 = \{\rho(M) \mid \mathsf{L}(M) = \emptyset\}$$

και

$$L_{10} = \{\langle \rho(M_1), \rho(M_2) \rangle \mid \mathsf{L}(M_1) \leq_m \mathsf{L}(M_2)\}.$$

(Νοείται ότι $\rho(M)$ συμβολίζει την κωδικοποίηση μηχανής Turing M και $\mathsf{L}(M)$ συμβολίζει την γλώσσα η οποία γίνεται δεκτή από την μηχανή Turing M.)

Παρουσιάζοντας κατάλληλη συνάρτηση αναγωγής f, αποδείξτε ότι $L_9 \leq_m L_{10}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \{\rho(M)\} \to \{\rho(M_1), \rho(M_2)\}$ με $f(\rho(M)) = \langle \rho(M), \rho(M_0) \rangle$, όπου M_0 είναι η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

"Πάνω σε αυθαίρετη είσοδο w, τερμάτισε και απόρριψε."

(Προφανώς, $L(M_0) = \emptyset$.) Προφανώς, η συνάρτηση f είναι αναδρομική. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση αναγωγής από την L_9 στην L_{10} πρέπει να δείξουμε ότι

$$\forall w \in \Sigma^* \quad w \in L_9 \iff f(w) \in L_{10}$$

ή

$$\forall \rho(M) \quad \rho(M) \in L_9 \iff \langle \rho(M), \rho(M_0) \rangle \in L_{10}$$

ή $\forall \rho(M) \quad L(M) = \emptyset \iff L(M) \leq_m \emptyset$

ή $\forall \rho(M)$

$$L(M) = \emptyset \iff \left(\exists f' : \Sigma^* \to \Sigma^* \ \forall w \ \ w \in L(M) \Leftrightarrow \overbrace{w \in \emptyset}^{\text{ψευδής}}\right)$$

- Έστω $L(M) = \emptyset$. Τότε, $(w \in L(M))$ είναι πάντοτε ψευδής και οποιαδήποτε f' ικανοποιεί την ισοδυναμία $\forall w$.
- Έστω $L(M) \neq \emptyset$. Τότε, για κάθε f', θεωρώ τη λέξη $w_0 \in L(M)$. Για τη λέξη w_0, $(w_0 \in L(M))$ είναι αληθής, ενώ $w_0 \in L(M_0)$ είναι ψευδής. Αντίφαση.

(β) Περιγράψτε ένα αυτόματο με δύο στοίβες το οποίο δέχεται τη γλώσσα L_8. Εξηγείστε συνοπτικά τη λειτουργία του αυτομάτου σας.

Το αυτόματο με δύο στοίβες σας οφείλει να είναι ορθό. Ωστόσο, δεν σας ζητείται να αποδείξετε την ορθότητά του.

Το αυτόματο με δύο στοίβες έχει το εξής πρόγραμμα:

1. Διαβάζουμε πρώτα την πρώτη σειρά των a και την αντιγράφουμε στην πρώτη στοίβα.

2. Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση.

3. Διαβάζουμε την πρώτη σειρά των b, και για κάθε b που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα a από την πρώτη στοίβα και γράφουμε ένα b στη δεύτερη στοίβα.

4. Μη ντετερμινιστικά αλλάζουμε κατάσταση, και εφόσον η πρώτη στοίβα είναι άδεια:

5. Διαβάζουμε την πρώτη σειρά των c, και για κάθε c που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα b από την δεύτερη στοίβα και γράφουμε ένα c στην πρώτη στοίβα.

6. Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση, και εφόσον η δεύτερη στοίβα είναι άδεια:

7. Διαβάζουμε την δεύτερη σειρά των b, και για κάθε b που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα c από την πρώτη στοίβα και γράφουμε ένα b στην δεύτερη στοίβα.

8. Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση, και εφόσον η πρώτη στοίβα είναι άδεια:

9. Διαβάζουμε την δεύτερη σειρά των c, και για κάθε c που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα b από τη 2η στοίβα και γράφουμε ένα c στην 1η στ.

10. Μη ντετερμινιστικά αλλάζουμε κατάσταση, και εφόσον η 2η στοίβα είναι άδεια:

11. Διαβάζουμε την δεύτερη σειρά των a, και για κάθε a που διαβάζαμε, σβήνουμε ένα c από την 1η στοίβα. 12. Μη ντετερμινιστικά, πηγαίνουμε στην τελική κατάσταση