Τελική Εξέταση

- Απαντείστε όλα τα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: Δύο ώρες.

1. **(9 + 12 = 21 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά την κατασκευή ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων και την Κατασκευή Γινομένου. Υπενθυμίζουμε ότι η Κατασκευή Γινομένου παρέχει κατασκευαστική απόδειξη ότι η τομή των γλωσσών δύο ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων είναι γλώσσα ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτομάτου. Με στοιχειώδη τροποποίησή της, η Κατασκευή Γινομένου παρέχει αντίστοιχη κατασκευαστική απόδειξη ότι και η ένωση των γλωσσών δύο ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων είναι γλώσσα ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτομάτου. (Η Κατασκευή Γινομένου παρουσιάζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.16 του προσχεδίου βιβλίου υπό του διδάσκοντος.) Θεωρούμε τις γλώσσες

$$L_1 = \{a^n \mid \text{ ο } n \text{ είναι περιττός}\},$$

$$L_2 = \{a^n \mid \text{ ο } n \text{ είναι άρτιος}\},$$

και

$$L_3 = \{a^n \mid \text{ ο } n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3\}.$$

   (α) Κατασκευάστε τρία απλά **ντετερμινιστικά** πεπερασμένα αυτόματα για τις γλώσσες L_1, L_2 και L_3, αντίστοιχα.

(β) Χρησιμοποιείστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) και την Κατασκευή Γινομένου για να κατασκευάσετε τρία (απλά) **ντετερμινιστικά** πεπερασμένα αυτόματα για τις γλώσσες $L_4 = L_1 \cap L_3$, $L_5 = L_2 \cap L_3$ και $L_6 = L_1 \cup L_2$, αντίστοιχα.

2. **(2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 6 + 2 + 2 + 6 = 25 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή). Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L_7 \;=\; \{a^{pq} \mid \text{ο } p \text{ είναι πρώτος αριθμός και ο } q \text{ είναι δύναμη του } 2\ \}$$

δεν είναι κατηγορηματική.

Η απόδειξή σας **πρέπει** να συμπληρώσει κατάλληλα τα (εννέα) κενα στην παρακάτω (ελλιπή) απόδειξη:

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η L_7 είναι κατηγορηματική. Αφού η L_7 είναι άπειρη, το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε κάθε λέξη $w \in L_7$ με μήκος $|w| \geq M$ μπορεί να γραφεί ως $w = uvxyz$ έτσι ώστε *(i)* $vy \neq \epsilon$, *(ii)* $|vxy| \leq M$, και *(iii)* για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, $uv^nxy^nz \in L_7$.

Επιλέγουμε τη λέξη $w = a^{pq}$, όπου ο p είναι ____________________

και ο q είναι ____________________ ,

Προφανώς, $w \in L_7$. Παρατηρούμε ότι $|w| =$ ____________________ $\geq M$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- <u>Ο ακέραιος $|vy|$ είναι άρτιος.</u> Τότε, επιλέγουμε $n =$ ____________________ .
  Τότε, $uv^nxy^nz =$ ____________________ .
  Παρατηρούμε ότι ____________________ -
  \- ____________________ -
  \- ____________________ -
  \- ____________________ -
  \- ____________________ Αντίφαση.
- <u>Ο ακέραιος $|vy|$ είναι περιττός.</u> Τότε, επιλέγουμε $n =$ ____________________ .
  Τότε, $uv^nxy^nz =$ ____________________ .
  Παρατηρούμε ότι ____________________ -
  \- ____________________ -
  \- ____________________ -
  \- ____________________ -
  \- ____________________ Αντίφαση.

3. **(20 + 15 = 35 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά γενικές γραμματικές και αυτόματα με δύο στοίβες. Θεωρούμε τη γλώσσα

$$L_8 \;=\; \{a^i b^i c^i b^i c^i a^i \mid i \geq 0\}\,.$$

(α) Κατασκευάστε μία γενική γραμματική η οποία παράγει τη γλώσσα L_8. Εξηγείστε συνοπτικά τη λειτουργία της γραμματικής σας.

Η γενική γραμματική σας οφείλει να είναι ορθή. Ωστόσο, δεν σας ζητείται να αποδείξετε την ορθότητά της.

(β) Περιγράψτε ένα αυτόματο με δύο στοίβες το οποίο δέχεται τη γλώσσα L_8. Εξηγείστε συνοπτικά τη λειτουργία του αυτομάτου σας.

Το αυτόματο με δύο στοίβες σας οφείλει να είναι ορθό. Ωστόσο, δεν σας ζητείται να αποδείξετε την ορθότητά του.

4. **(20 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά την έννοια της πολλά-προς-ένα αναγωγής ($\leq_m$). Θεωρούμε τις γλώσσες

$$L_9 \;=\; \{\rho(M) \mid \mathsf{L}(M) = \emptyset\}$$

και

$$L_{10} \;=\; \{\langle \rho(M_1), \rho(M_2) \rangle \mid \mathsf{L}(M_1) \leq_m \mathsf{L}(M_2)\}\,.$$

(Νοείται ότι $\rho(M)$ συμβολίζει την κωδικοποίηση μηχανής Turing M και $\mathsf{L}(M)$ συμβολίζει την γλώσσα η οποία γίνεται δεκτή από την μηχανή Turing M.)

Παρουσιάζοντας κατάλληλη συνάρτηση αναγωγής f, αποδείξτε ότι $L_9 \leq_m L_{10}$.