# Αλγόριθμοι Οπισθοδρόμησης

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

*Η οπισθοδρόμηση στο σχεδιασμό αλγορίθμων*

*Το πρόβλημα των σταθερών γάμων και ο αλγόριθμος των Gale-Shapley*

*Το πρόβλημα των οκτώ βασιλισσών*

# Αλγόριθμοι Οπισθοδρόμησης

- Βασικό χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι η *αναίρεση των αποτελεσμάτων* κάποιων υπολογιστικών βημάτων, και η *οπισθοδρόμηση* σε κάποιο προηγούμενο βήμα, όπου λαμβάνονται κάποιες διαφορετικές επιλογές.

- Η οπισθοδρόμηση δεν πρέπει να εμποδίζει τον αλγόριθμο από το να τερματίζει.

- Ο αλγόριθμος δεν πρέπει να ξοδεύει χρόνο σε περιττές επαναλήψεις.

# Αλγόριθμοι οπισθοδρόμησης

- Η κατασκευή της λύσης κάποιων προβλημάτων μπορεί να θεωρηθεί ως ένας γράφος, του οποίου οι κόμβοι είναι καταστάσεις υποπροβλημάτων και η ύπαρξη ακμής μεταξύ δύο κόμβων δηλώνει τη δυνατότητα κίνησης μεταξύ των καταστάσεων που απεικονίζουν.

- Λύση του προβλήματος μπορεί να μεταφραστεί ως την εύρεση κάποιου κόμβου, ή μονοπατιού μέσα στο γράφο, άρα μπορεί να επιτευχθεί με μια κατά-βάθος διερεύνηση του γράφου.

- Ξεκινούμε από τη 'ρίζα' του γράφου, αρχικά χωρίς καμιά γνώση για τη λύση του προβλήματος. Κατά την αναζήτηση του γράφου κτίζουμε τη λύση ως εξής: επισκεπτόμενοι κάποιο κόμβο μελετούμε τις πληροφορίες που περιέχει σχετικά με τη λύση του προβλήματος
  1. αν αυτές είναι νόμιμες με τη λύση τότε τις συλλέγουμε και συνεχίζουμε τη διερεύνηση,
  2. διαφορετικά, τις αγνοούμε και οπισθοδρομούμε στον προηγούμενο κόμβο, από όπου συνεχίζουμε την κατά-βάθος διερεύνηση ακολουθώντας κάποια διαφορετική επιλογή.

- Κτίσιμο του γράφου μπορεί να γίνει δυναμικά, κατά την αναζήτηση της λύσης του προβλήματος.

# Το Πρόβλημα των Σταθερών Γάμων

- **Δεδομένο εισόδου:** Δινόμαστε δύο σύνολα

  *M, οι άνδρες, και*

  *W, οι γυναίκες,*

  με n στοιχεία το καθένα.

- Επίσης για κάθε $x \in M \cup W$ δινόμαστε μια αυστηρά διατεταγμένη *λίστα προτιμήσεων* που περιέχει όλα τα άτομα του αντίθετου φύλου.

- Δηλαδή, αν στη λίστα προτιμήσεων του ατόμου r το άτομο p προηγείται του q τότε το r προτιμά το άτομο p έναντι του ατόμου q.

- Ένα *ζευγάρωμα* Z είναι μια ένα-προς-ένα αντιστοίχηση μεταξύ των συνόλων M και W.

- Αν ο άνδρας m και η γυναίκα w ζευγαρώνονται στο Z, γράφουμε m=Z(w), w=Z(m).

# Το Πρόβλημα των Σταθερών Γάμων

- Για ένα ζευγάρωμα Z, ο άντρας m και η γυναίκα w αποτελούν ένα *επικίνδυνο ζευγάρι*, αν ο m και η w δεν ζευγαρώνονται στο Z, και εντούτοις

  ο m προτιμά την w έναντι της Z(m) και

  η w προτιμά τον m έναντι του Z(w).

- Ένα ζευγάρωμα Z θα λέγεται *ασταθές* αν περιέχει ένα τουλάχιστον επικίνδυνο ζευγάρι, διαφορετικά θα λέγεται *σταθερό*.

- Στόχος: Με δεδομένο εισόδου κάποιο στιγμιότυπο του προβλήματος, να προσδιορίσουμε ένα σταθερό ζευγάρωμα.

# Παράδειγμα

| άνδρας | λίστα προτίμησης |
|---|---|
| **1** | 2 4 1 3 |
| **2** | 3 1 4 2 |
| **3** | 2 3 1 4 |
| **4** | 4 1 3 2 |

| γυναίκα | λίστα προτίμησης |
|---|---|
| **1** | 2 1 4 3 |
| **2** | 4 3 1 2 |
| **3** | 1 4 3 2 |
| **4** | 2 1 4 3 |

- Είναι τα πιο κάτω ζευγαρώματα σταθερά;

  {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}

  {(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)}

  {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}

- Υπάρχουν άλλα σταθερά ζευγαρώματα;

# Ο αλγόριθμος των Gale-Shapley

```
για όλα τα  x ∈ M∪W, single[x] = True;
Z = ∅;
while(single[m]=True για κάποιο m∈M ){
   w = πρώτη γυναίκα στη λίστα του m στην οποία ο
       m δεν έχει ακόμη κάνει πρόταση γάμου;
   if single(w)
       Z = Z ∪ {(m,w)};
       single(m)= single(w)= False;
   else
       if (m′,w)∈Z   &&   η w προτιμά τον m από τον m′
             Z = Z∪{(m,w)}-(m′,w)};
             single(m′) = True;
             single(m) = False;
       else η w απορρίπτει τον m
       }
return Z
```

Παρατήρηση: Ο αλγόριθμος δεν προσδιορίζει τη σειρά με την οποία οι άνδρες κάνουν προτάσεις στις γυναίκες.

# Ορθότητα του Αλγόριθμου

**Θεώρημα:**

1. Ο αλγόριθμος Gale-Shapley τερματίζει.
2. Όταν τερματίσει ο αλγόριθμος Gale-Shapley παράγει ένα σταθερό ζευγάρωμα.

*Απόδειξη της πρότασης 1*

- Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατό κάποιος άνδρας να απορριφθεί από όλες τις γυναίκες:

  Έστω ότι είναι. Μια γυναίκα μπορεί να απορρίψει ένα άνδρα όταν είναι ζευγαρωμένη και εφόσον μια γυναίκα παντρευτεί δεν ξαναγίνεται ελεύθερη. Έτσι όταν ένα άντρας απορριφθεί από την τελευταία γυναίκα στη λίστα, τότε όλες οι γυναίκες πρέπει να είναι ήδη παντρεμένες. Άρα και όλοι οι άνδρες. Αντίφαση!

- Άρα κάθε άντρας γίνεται τελικά δεκτός από κάποια γυναίκα. Αφού κάθε επανάληψη του αλγόριθμου εμπεριέχει μια μόνο πρόταση γάμου, και κανένας άνδρας δεν κάνει πρόταση για δεύτερη φορά στην ίδια γυναίκα, ο αριθμός των επαναλήψεων είναι το πολύ $n^2$.

- Επομένως ο αλγόριθμος τερματίζει.

# Ορθότητα του Αλγόριθμου

*Απόδειξη της πρότασης 2*

- Προφανώς όταν τερματίσει ο αλγόριθμος παράγει κάποιο ζευγάρωμα, Z. Αν ο άνδρας m προτιμά τη γυναίκα w έναντι της Z(w) τότε θα πρέπει η w να έχει απορρίψει τον m. Αυτό μπορεί να έχει συμβεί είτε επειδή η w ήταν παντρεμένη με κάποιο άνδρα που προτιμούσε έναντι του m όταν ο m της έκανε πρόταση, είτε επειδή η w ήταν παντρεμένη με τον m αλλά τον χώρισε όταν κάποιος άνδρας που προτιμούσε έναντι του m της έκανε πρόταση.

- Και στις δύο περιπτώσεις, η w στην τελική κατάσταση βρίσκεται παντρεμένη με κάποιον άνδρα τον οποίο προτιμά έναντι του m.

- Επομένως το ζευγάρι (m,w) δεν είναι επικίνδυνο για το Z. Αφού αυτό ισχύει για όλα τα ζευγάρια (m,w), το Z είναι σταθερό ζευγάρωμα.

■

# Παράδειγμα

- Εφαρμόστε τον αλγόριθμο στο πιο κάτω στιγμιότυπο, υποθέτοντας ότι σε κάθε επανάληψη του βρόχου διαλέγεται ο ελεύθερος άνδρας με τον πιο μικρό αριθμό.

| **άνδρας** | **λίστα προτίμησης** |
|---|---|
| **1** | 2 4 1 3 |
| **2** | 1 3 4 2 |
| **3** | 4 1 2 3 |
| **4** | 1 2 3 4 |

| **γυναίκα** | **λίστα προτίμησης** |
|---|---|
| **1** | 2 1 4 3 |
| **2** | 2 3 4 1 |
| **3** | 4 2 1 3 |
| **4** | 4 3 2 1 |

# Το πρόβλημα των 8 βασιλισσών

- **<u>Στόχος:</u>** Να τοποθετήσουμε 8 βασίλισσες σε μια σκακιέρα έτσι ώστε καμιά από τις βασίλισσες να μην απειλεί οποιαδήποτε άλλη.

  (Μια βασίλισσα απειλεί κάποια άλλη αν βρίσκονται και οι δύο στην ίδια σειρά, ή στην ίδια στήλη, ή στην ίδια διαγώνιο.)

- <u>Εξαντλητικός αλγόριθμος</u>: δοκιμάζουμε όλες τις δυνατές τοποθετήσεις. Υπάρχουν $\binom{64}{8} = 4{,}426{,}165{,}368$.

- <u>Βελτίωση 1</u>: Τοποθετούμε το πολύ μια βασίλισσα σε κάθε σειρά. Άρα οποιαδήποτε τοποθέτηση μπορεί να απεικονιστεί ως ένα 8-διάνυσμα, π.χ. το διάνυσμα (3,1,4,5,2,5,8,7) αντιστοιχεί στην τοποθέτηση βασιλισσών =>

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | | | | | |
| B | | | | | | | |
| | | | B | | | | |
| | | | | B | | | |
| | B | | | | | | |
| | | | | B | | | |
| | | | | | | | B |
| | | | | | | B | |

- Ο αριθμός των δυνατών τοποθετήσεων είναι $8^8 = 16{,}777{,}216$.

# Το πρόβλημα των 8 βασιλισσών

- Βελτίωση 2: Τοποθετούμε το πολύ μια βασίλισσα σε κάθε σειρά και το πολύ μια βασίλισσα σε κάθε στήλη. Άρα οποιαδήποτε τοποθέτηση μπορεί να απεικονιστεί ως ένα 8-διάνυσμα στο οποίο κάθε αριθμός από τους 1..8, παρουσιάζεται ακριβώς μια φορά , π.χ. το διάνυσμα (3,1,4,5,2,6,8,7) αντιστοιχεί στην τοποθέτηση βασιλισσών =>

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **B** | | | | | |
| **B** | | | | | | | |
| | | | **B** | | | | |
| | | | | **B** | | | |
| | **B** | | | | | | |
| | | | | | **B** | | |
| | | | | | | | **B** |
| | | | | | | **B** | |

- Αριθμός πιθανών τοποθετήσεων 8!=40320 .

- Μειονέκτημα των πιο πάνω μεθόδων: δημιουργούν ολόκληρη την τοποθέτηση προτού ελέγξουν κατά πόσο είναι νόμιμη.

# Αλγόριθμος Οπισθοδρόμησης

- Ένα διάνυσμα Δ[1..k], $0 \leq k \leq 8$ θα λέγεται *k-υποσχόμενο* αν, τοποθετώντας k βασίλισσες στις θέσεις (i, Δ[i]), τότε καμιά από αυτές δεν απειλεί καμιά άλλη. Μαθηματικά αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

  για κάθε $1 \leq i,j \leq k$, $i \neq j$, $\Delta[i]-\Delta[j] \notin \{i-j, 0, j-i\}$.

- Λύση στο πρόβλημα είναι όλα τα 8-υποσχόμενα διανύσματα.

- Θεωρώντας ότι ξεκινούμε με το 0-υποσχόμενο διάνυσμα είναι δυνατό να κτίσουμε όλα τα 1-υποσχόμενα διανύσματα, 2-υποσχόμενα διανύσματα, και ούτω καθ'εξής. Με δεδομένο ένα i-υποσχόμενο διάνυσμα υπάρχουν δύο περιπτώσεις

  1. είτε αυτό μπορεί να γίνει (i+1)-υποσχόμενο διάνυσμα με την προσθήκη κατάλληλης τιμής στη θέση Δ[i+1],
  2. είτε έχουμε φτάσει σε αδιέξοδο, δηλαδή σε μια τοποθέτηση στην οποία οποιαδήποτε προσθήκη βασίλισσας στην i+1 σειρά, συνεπάγεται απειλή μιας από τις βασίλισσες στις σειρές 1..i.

# Ο Αλγόριθμος

- Η διαδικασία queens() υπολογίζει και επιστρέφει ένα 8-υποσχόμενο διάνυσμα .

```
queens(){
  i=1; k = 1;
  while ( i ≤ 8 )
     found = false;
     while (k ≤ 8  or  found == false)
          D[i] = k; k++;
          if (D είναι i-υποσχόμενο)
             found = true; i++; k=1;
     if (found == false)
          i--;
          k = D[i]+1
   return D[8];
}
```

- Ο αλγόριθμος είναι ορθός:
  1. τερματίζει, και 2. υπολογίζει κάποιο 8-υποσχόμενο διάνυσμα.